I

T.de

Solution :

Mouhamedlemine 1279
Moussa / sleimane 1343
hatan ould Ahmedsalmie 1223

Exercice 1

Sur un intervalle précisé, calculer une primitive des fonctions suivantes:

$f_1(x) = 5x^3 + \frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2} + 3$	$f_6(x) = \frac{4x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}$
$f_2(x) = 2\sqrt{x^3} + \frac{3}{x^5} + 4x - 1$	$f_7(x) = x^3(x^4+1)^{2015}$
$f_3(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 7\sin 2x$	$f_8(x) = \cos x\sqrt{1+\sin x}$
$f_4(x) = 5x^3(x^4+1)^{2015}$	$f_9(x) = \frac{3\sin x}{\sqrt{3+2\cos x}}$
$f_5(x) = \tan^{2013} x + \tan^{2015} x$	$f_{10}(x) = \frac{8x+8}{3\sqrt{x^2+2x+5}}$

Solution :

1. $f_1(x) = 5x^3 + \frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2} + 3$

$F_1(x) = \frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3} \times 2\sqrt{x} - 5x\left(\frac{-1}{x}\right) + 3x + k$

$= \frac{5}{4}x^4 + \frac{4}{3}\sqrt{x} + \frac{5}{x} + 3x + k$

est Une primitive de f_1 sur $]0, +\infty[$

2. $f_2(x) = 2\sqrt{x^3} + \frac{3}{x^5} + 4x - 1$

$= 2x^{3/2} + 3x^{-5} + 4x - 1$

$F_2(x) = 2 \times \frac{x^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1} + 3 \times \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + 4\left(\frac{x^2}{2}\right) - x + k$

$= 2 \times \frac{x^{5/2}}{5/2} + 3 \times \frac{x^{-4}}{-4} + 2x^2 - x + k.$

$= 2 \times \frac{2}{5}x^{2+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{x^4} + 2x^2 - x + k.$

$= \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{3}{4x^4} + 2x^2 - x + k$

est Une primitive de f_2 sur $]0, +\infty[$

3. $f_3(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 7\sin 2x$

$F_3(x) = \tan x - 7 \times \left(\frac{-1}{2}\cos 2x\right) + k$

$= \tan x + 7/2 \cos 2x + k$

est Une primitive de f_3 sur $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

4. $f_4(x) = 5x^3(x^4+1)^{2015}$

$= \frac{5}{4}(4x^3)(x^4+1)^{2015}$

$\frac{5}{4}u'(x)(u(x))^{2015}$

où $u(x) = x^4 + 1$

Donc

$F_4(x) = \frac{5}{4} \times \frac{(x^4+1)^{2015+1}}{2015+1} + k$

$= \frac{5}{4}\left(\frac{(x^4+1)^{2016}}{2016}\right) + k$

est Une primitive de f_4 sur $\mathbb{R}$.

5. $f_5(x) = \tan^{2013} x + \tan^{2015} x$

$= \tan^{2013} x\,(1 + \tan^2 x)$

$= u'(x)\,(u(x))^n$

où $u(x) = \tan x$ et $n = 2013$

$F_5(x) = \frac{\tan^{2014} x}{2014} + c$

est Une primitive de f_5 sur $]\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$. $k \in \mathbb{Z}$.

1

6. $f_6(x) = \dfrac{4x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}$

$= \dfrac{3x^2+x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}$

$= \dfrac{3x^2+\underbrace{x^2+2x+1}_{(x+1)^2}}{x^2(x+1)^2}$

$= \dfrac{3x^2+(x+1)^2}{x^2+(x+1)^2}$

$\dfrac{3x^2}{x^2+(x+1)^2} + \dfrac{(x+1)^2}{x^2+(x+1)^2}$

$\dfrac{3}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x^2}$

$F_6(x) = \dfrac{-3}{x+1} - \dfrac{1}{x} + c$

est une primitive de f_6 sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, +\infty[$ et $]0, +\infty[$.

7. $f_7(x) = x^3(x^4+1)^{2015}$

$= \dfrac{1}{4}(4x^3)(x^4+1)^{2015}$

$= \dfrac{1}{4} u'(x)(u(x))^n$

où $u(x) = x^4+1$ et $n = 2015$

$F_7(x) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{(x^4+1)^{2016}}{2016}\right) + c$

est une primitive de f_7 sur $\mathbb{R}$.

8. $f_8(x) = \cos x\sqrt{1+\sin x}$

$= \cos x\,(1+\sin x)^{1/2}$

$u'(x)\,(u(x))^{1/2}$

$F_8(x) = \dfrac{(1+\sin x)^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$

$= \dfrac{(1+\sin x)^{3/2}}{3/2} + c$

$= \frac{2}{3}\sqrt{(1+\sin x)^3} + c$

est une primitive de f_8 sur $\mathbb{R}$.

9. $f_9(x) = \dfrac{3\sin x}{\sqrt{3+2\cos x}}$

$= -\dfrac{3}{2} \times \dfrac{(-2\sin x)}{\sqrt{3+2\cos x}}$

$= -3/2 \times \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ où

$u(x) = 3+2\cos x$

$F_9(x) = -\dfrac{3}{2} \times 2\sqrt{3+2\cos x}$

10. $f_{10}(x) = \dfrac{8x+8}{3\sqrt{x^2+2x+5}}$

$\dfrac{4}{3} \times \dfrac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

$F_{10}(x) = \dfrac{4}{3} \times 2\sqrt{x^2+2x+5}$

$= 8/3\sqrt{x^2+2x+5}$

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Exercice 4

Soit la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par: $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

On pose : $I = \int_0^1 \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$; $J = \int_0^1 \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}dx$.

Calculer $f'(x)$; en déduire I et J.

Solution :

1) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

soit

$$f'(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

L'intégrale I

$$I = \int_0^1 \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

peut être sous forme :

$$I = \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$$

D'où $I = \left[\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2\right]_0^1$

$$I = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(1)^2$$

$$I = \frac{1}{2}\left(3+2\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{I = 1+\sqrt{2}}$$

L'intégral J

$$J = \int_0^1 \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}dx$$

peut être sous la forme :

$$J = \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}dx$$

d'où

$J = \left[\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]_0^1 \Rightarrow J = \frac{-1}{1+\sqrt{2}} + 1$ Enfin $\boxed{J = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par: $f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\,dt$

1) Montrer que f est une fonction affine.
2) Donner l'expression de f(x).

Solution :

$f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\,dt.$

1) pour montrer que f est Une fonction affine, il suffit que sa fonction derivée st Constante $f'(x) = cte$, Comme les fonction

$u(x) = \cos x$ et $v(x) = \sin x$

sont derivable sur $[0, \pi/2]$

et Comme La fonction $g(t) = \sqrt{1-t^2}$

est Continue sur $[-1, 1]$

t	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-t^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

et $\cos \in [-1, 1]$

et $\sin \in [-1, 1]$

$\forall x \in [0, \pi/2]$.

Le fonction est derivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

et $\forall x \in [0, \pi/2]$

$f'(x) = v'(x) \cdot g(v(x)) - u'(x) \times g(u(x))$

$= \cos x \times \sqrt{1-\sin^2 x} - (-\sin)\sqrt{1-\cos^2 x}$

$= \cos x \times \sqrt{\cos^2 x} + \sin x \times \sqrt{\sin^2 x}$

$= \cos x\,|\cos x| + \sin x\,|\sin x|$

or : $\forall x \in [0, \pi/2]$ $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

d'où $\forall x \in [0, \pi/2]$ $\begin{cases} |\cos x| = \cos x \\ |\sin x| = \sin x \end{cases}$

D'où : $f'(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$

D'où $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = 1$

Donc : f st Une fonction affine

2) Comme $\forall x \in [0, \pi/2]$, $f'(x) = 1$

il existe Une constante c

tell que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = x + c$.

$f(x) = x + c$

Exercice 13

1) Montrer que pour tout entiers naturels non nuls m et n: $\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx = \int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$

2) En déduire que: $\sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{(-1)^p}{m+p+1} = \sum_{p=0}^{m} C_m^p \frac{(-1)^p}{n+p+1}$.

Solution :

1) $\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx = \int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$

On pose : $I = \int_0^1 x^n(1+x)^m\,dx$

$t = 1-x$

$\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=0 \end{cases}$

$dt = -dx \Rightarrow dx = -dt$

$I = \int (1-t)^n t^m(-dt) = \int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt = \int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$

Donc $\int_0^1 x^n(1-x)^m = \int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$

2) $\sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{(-1)^p}{m+p+1} = \sum_{p=0}^{n} C_m^p \frac{(-1)^p}{m+p+1}$

On a $\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx = \int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$

$\int_0^1 x^n \sum_{p=0}^{n} C_m^p 1^{m-p}(-x)^p\,dx = \int_0^1 x^m \sum_{p=0}^{n} C_n^p 1^{n-p}(-x)^p\,dx$

$\sum_{p=0}^{m} C_m^p \int_0^1 x^n(-1)^p x^p\,dx$

$\sum_{p=0}^{n} C_n^p \int_0^1 x^m (-1)^p . x^p\,dx$

$= \sum_{p=0}^{m} C_m^p (-1)^p \int_0^1 x^{n+p}\,dx$

$\sum_{p=0}^{n} C_n^p (-1)^p \int_0^1 x^{m+p}\,dx$

$\sum_{p=0}^{m} C_m^p (-1)^p \left[\frac{1}{n+p+1} x^{n+p+1}\right]_0^1$

$\sum_{p=0}^{n} C_m^p (-1)^p \int_0^1 x^{m+p}\,dx \Rightarrow$

$\sum_{p=0}^{1} C_n^p (-1)^p \left[\frac{1}{m+p+1} x^{m+p+1}\right]_0^1$

$\sum_{p=0}^{m} C_m^p \frac{(-1)^p}{n+p+1} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{(-1)^p}{m+p+1}$

Exercice 10

En utilisant le changement de variable, calculer les intégrales suivantes:

$I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{(4x+5)^2}$; $t = 4x+5$ $\qquad I_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; $x = \tan t$

$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4dx}{1+\cos x}$; $t = \tan\frac{x}{2}$ $\qquad I_4 = \int_2^3 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$; $t = x-1$

$I_5 = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+3x+2}dx$; $t = \sqrt{1+x}$ puis $t = \tan u$.

Solution :

En utilisant le changement de variable,

Methode :

[1] changement de bornes.

[2] Relation entre les différentielles.

[3] Remplacement.

[4] calcule.

1- $I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{(4x+5)^2}$

$t = 4x+5$

$\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=9 \\ x=2 \Rightarrow t=13. \end{cases}$

$dt = 4dx \Rightarrow dx = \frac{1}{4}dt.$

$I_1 = \int_9^{13} \frac{1}{4} \cdot \frac{dt}{t^5}.$

$= \frac{1}{4}\int_9^{13} t^{-5}dt$

$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{4}t^{-4}\right]_9^{13}$

$\boxed{I_1 = \frac{-1}{16}\left(13^{-4} - 9^{-4}\right)}$

2- $I_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

$x = \tan t,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[.$

$\begin{cases} x=1 \Rightarrow \tan 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ x=\sqrt{3} \Rightarrow \tan\sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

$dx = (1+\tan^2 t)dt$

$I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1+\tan^2 t)dt}{1+\tan^2 t}$

$I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt.$

$I_2 = \left[t\right]_{\pi/4}^{\pi/3}$

$I_2 = \pi/3 - \pi/4$

$\boxed{I_2 = \pi/12}$

3- $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4dx}{1+\cos x}$

$t = \tan x/2$

$\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=\tan 0 = 0 \\ x=\pi/2 \Rightarrow t=\tan\frac{\pi}{4} = 1 \end{cases}$

$dt = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx$

$= \frac{1}{2\cos^2 x/2}dx$

$dx = 2\cos^2 x/2\ dt.$

$I_3 = \int_0^1 \frac{4 \cdot 2\cos^2 x/2}{1+\cos x}dt.$

On sait que

$1+\cos x = 2\cos^2 x/2$

Alors $I_3 = \int_0^1 \frac{4 \cdot 2\cos^2\frac{x}{2}}{2\cos^2 x/2}dt$

$I_3 = \int_0^1 4dt$

$I_3 = \left[4t\right]_0^1$

$\boxed{I_3 = 4}$

4- $I_4 = \int_2^3 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$

$t = x-1$

$\begin{cases} x=2 \Rightarrow t=1 \\ x=3 \Rightarrow t=2 \end{cases}$

$dt = dx$

$I_4 = \int_1^2 \frac{(t+1)^3}{\sqrt{t}}dt.$

$I_4 = \int_1^2 \frac{t^3+3t^2+3t-1}{t^{1/2}}dt.$

$= \int_1^2 \left(\frac{t^3}{t^{\frac{1}{2}}} + \frac{3t^2}{t^{1/2}} + \frac{3t}{t^{1/2}} + \frac{1}{t^{1/2}}\right)dt$

$= \int_1^2 \left(t^{\frac{5}{2}} + 3t^{3/2} + 3t^{\frac{1}{2}} + t^{-1/2}\right)dt.$

$= \left[\frac{1}{\frac{5}{2}+1}t^{\frac{5}{2}+1} + \frac{3}{\frac{3}{2}+1}t^{3/2+1} + \frac{3}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}t^{-\frac{1}{2}+1}\right]_1^2$

$= \left[\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} + \frac{6}{5}t^{\frac{5}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}} + 2t^{\frac{1}{2}}\right]_1^2$

$= \left[\left(\frac{2}{7}t^3 + \frac{6}{5}t^2 + 2t + 2\right)\sqrt{t}\right]_1^2$

$\left(\frac{16}{7} + \frac{24}{5} + 6\right)\sqrt{2} - \left(\frac{2}{7} + \frac{6}{5} + 4\right)$

$\boxed{I_4 = \left(\frac{458}{35}\right)\sqrt{2} - \frac{192}{35}}$

5- $I_5 = \int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+3x+2}\,dx$

$t = \sqrt{x+1}$

$\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=2 \Rightarrow t=\sqrt{3} \end{cases}$

$dt = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx \Rightarrow$

$dt = \frac{1}{2t}\,dx$

$dx = 2t\,dt$

On Constant que

$x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$

$= t^2(t^2+1)$

$I_5 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t \times 2t}{t^2(t^2+1)}\,dx$

$I_5 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2dt}{t^2+1}$

$t = \tan u$

$\{ t=1 \Rightarrow \tan u = 1 \Rightarrow u = \pi/4$.